微分形式による電磁場の解析力学

中村 匡 [1]
[1] 福井県大

Covariant Analytical Mechanics of Electromagnetism

Tadas Nakamura[1]
[1] FPU

http://mira.bio.fpu.ac.jp/tadas

Analytical Mechanics of fields usually singles out the temporal coordinate as an independent parameter and calculates the time evolution regarding fields as dynamical parameters with infinite degree of freedom. Spatial coordinates are treated as infinite number of indexes of dynamical parameters. This approach has a disadvantage when applied to electromagnetism: the resulting equations are not manifestly covariant. Moreover, when applied to guage fields, the canonical theory with this approach has extra degree of freedom, which need to be eliminated with some constraints. One must fix the gauge at the price of loosing manifest covariance, or introduce some complicated technique such as Dirac brackets.

Present study treats 3+1 spacetime coordinates equally to obtain manifestly covariant formulation of analytical kinetics, and successfully obtain canonical equations for gauge fields without constraints. To this end, we apply the theory of differential forms proposed by E. Cartan.

Historically, the equations of electromagnetic fields first derived by J. C. Maxwell were not in the form of vector analysis but written with quanternions. This means the vector analysis we know is not the only way to express fields mathematically. Theory of differential forms is yet another way to treat fields; it has advantage that fields are systematically expressed in spaces with any order of dimension.

Since the theory of differential forms is not a standard tool for us space physicists, its tutorial introduction is provided at the talk. The topic of analytical mechanics of electromagnetism can be a good example of its applications.

References:

T.K. Nakamura,Bussei Kenkyuu,2003 (http://hdl.handle.net/2433/97295) [In Japanese]
Y. Kaminaga, Electronic Journal of Theoretical Physics, 2012 (http://www.ejtp.com/ejtpv9i26)

電磁場や流体などの空間に連続的にひろがる場の解析力学は、普通、時間をパラメーターとし、場を無限自由度の力学変数とみなして構築される。これは有限個の自由度をもつ系の時間発展を追う解析力学の自然な拡張であるが、電磁場などの場合、ある特定の系での時間座標をパラメーターとして使うため、明示的なローレンツ普遍性が失われるという欠点がある。また。このアプローチでは、電磁気などとゲージ場の場合にゲージ自由度に対応して変数の自由度が増えるため、なんらかの拘束条件を追加しなければ発展方程式の数が足りなくなってしまうという問題もある。このため、電磁場の正準理論はクーロンゲージなどのローレンツ普遍性を犠牲にしたゲージ固定をするか、あるいはディラック括弧のような複雑な数学テクニックを使うかなどしてこの問題を避けている。

過去に明示的なローレンツ普遍性を確保するために、時間と空間の３＋１次元の座標をパラメーターとしてあつかうDedonder-Wyle のアプローチがあったが，これをゲージ場に適用するとさらに変数の自由度が増えて都合が悪いという点から，あまり普及しなかった。本研究では Cartan によってはじめられた微分形式の理論によって力学変数を定義することによって，明示的にローレンツ不変でゲージ場でも拘束条件が必要のない解析力学表現を得た。

微分形式とは，従来のベクトル解析でベクトルやテンソルで表されていた場を，別の視点からさらにシステマティックにあつかう数学理論である。たとえばマックスウェル方程式は，最初はベクトル記法でなく，ハミルトンの四元数で書かれていたことからわかるように，場の量をあらわすには，ベクトル解析が唯一の記法ではなく，等価な別の記法もあり得る。ベクトル記法が３次元以下の場の記述に特化しているのに対し，Cartan によって案出された微分形式の理論は，任意の次元での場を見通しよく記述することができる。微分形式の理論は，宇宙プラズマ物理の業界ではあまり知られていないので，この紹介もかねて，本講演では微分形式を使った電磁場の解析力学について解説する。

参考文献：

中村匡，物性研究, 2003（http://hdl.handle.net/2433/97295）
Y. Kaminaga, Electronic Journal of Theoretical Physics, 2012 (http://www.ejtp.com/ejtpv9i26)