R010-09
C 会場 ：11/4　PM2 （15:45-18:15）
16:35〜16:50

時空発展する 3 次元磁場ベクトル場記述のためのアフィン接続

#吉川　顕正 [1)]
[(1] 九大/理学研究院

Development of Affine Connection for Describing Spatiotemporal Evolving 3D Magnetic Vector Fields

#Akimasa Yoshikawa[1)]
[(1]Kyushu Univ.

We have developed an affine connection on a differentiable manifold for analyzing and formulating the geometrical structure of magnetic fields as vector fields evolving arbitrarily in space-time.
A manifold is a space that can define a local Euclidean space at all points belonging to it. At each point on the manifold, a tangent space (tangent vector space) is defined. The tangent vector space is the set of all tangent vectors passing through the points of contact, forming a tangent vector field. This tangent vector field can be assumed to be a variety of calculus laws established in Euclidean space in the vicinity of the points of contact on the manifold. By "connecting" the tangent vector space defined at each of these points with the surrounding tangent vector space by a parallel shift on the manifold, the vector field in the entire space on the manifold can be defined. This "connection" of tangent vector spaces by parallel shifts on the manifold is an affine connection. That is, the affine connection allows the tangent vector field defined at each point on the manifold to behave like a function with values in the vector space fixed at each point. In other words, a collection of local coordinate systems defined at each point on the manifold covers the entire space, and data and physics can be described and compared under a common rule.

The affine connection we have developed enables us to capture the vector field as a fiber bundle of tightly distributed magnetic field lines and to describe its geometrical structure in the framework of ordinary vector analysis.This method extends the locally defined orthonormal Cartesian coordinate system parallel and perpendicular to the magnetic field in 3D by the following methodology:
(1) . To investigate the geometry of magnetic field lines, we first introduce the Frenet frame, which is a dynamic frame along a single curved line.In the Frenet frame, the local principal curve direction is determined by the unit vector in the tangent direction of the curve of interest, and the unit vectors in the principal normal (curvature direction) and secondary normal (orthogonal to the above two) directions to the principal curve are used to form a "local normal orthogonal system " is formed. Considering a tightly distributed group of magnetic field lines, this local normal orthogonal system will be distributed in space.
(2) . To connect the local orthonormal orthogonal systems distributed in this space, vector curved lines formed by connecting unit vectors in the main normal and bi-normal directions are introduced, and by shifting along each curve, the relative relationship with adjacent magnetic field lines is grasped and the analytical space is extended to the entire system.
(3). (1) and (2) uniquely determine the distribution of curvature and twist ratio for each curve filling the space tightly. This determines how the "tetrahedron" formed by the local orthonormal basis changes along with each curve (rigid directional change and rotation), and the 3-dimensional geometric structure of the magnetic field is completely determined.

That is, by shifting the tetrahedron formed by the local coordinate system along the principal curve, the principal normal, and the bi-normal, respectively, we can understand how the moving tetrahedron curved and rotated along the curved line, thereby determining the structure of the vector field that extends over the entire space. This is a methodology to know the structure of the vector field expanding in the whole space. Furthermore, the temporal evolution ratio of this tetrahedron (temporal changing ratio of direction and twisting ratio) is derived. This allows us to describe the 3-dimensional evolution of the magnetic field geometry.
In the talk, we will give an overview of the fundamental structure of the vector field obtained by these frameworks and discuss the underlying physics-based determinants of the vector field.

任意に時空発展するベクトル場としての磁場の幾何学的構造を解析・定式化するための可微分多様体上のアフィン接続を開発した。多様体とは、それに属するすべての点において、「局所的なユークリッド空間を定義出来る空間」のことである。多様体上の各点では、接空間（接ベクトル空間）が定義される。接ベクトル空間は、接点を通るすべての接ベクトルの集合であり、接ベクトル場を形成する。この接ベクトル場は、多様体上の接点近傍では、ユークリッド空間で成立する様々な微積分則が成り立つとすることが出来る。この各点で定義される接ベクトル空間を「多様体上の平行移動によって、周囲の接ベクトル空間と＜接続＞する」ことにより、多様体上の全空間におけるベクトル場が定義される。この多様体上の平行移動による接ベクトル空間の＜接続＞が、アフィン接続である。即ち、アフィン接続により、多様体上の各点で定義される接ベクトル場が、各点で固定されたベクトル空間に値をもつ関数のように振る舞うことが可能となる。言い

換えれば、多様体上の各点で定義された、局所座標系を連ねることにより全空間を覆い、共通のルールの下、データや物理を記述・比較することが可能となる。

我々開発したアフィン接続では、ベクトル場を稠密に分布する磁力線を束ねたファイバー束として捉え、その幾何学構造を通常のベクトル解析のフレームワークで記述することを可能とする。本手法では、以下の方法論により、局所的に定義される磁場と平行方向・垂直方向の正規直交座標系を 3 次元拡張し、全空間でのベクトル場の解析を可能とする。

（1）磁力線の幾何を調べるためにまず、1 本の曲線に沿った動標講である Frenet 標構を導入する。Frenet 標構では、着目する曲線（主曲線）の接線方向の単位ベクトルにより、局所的な主曲線方向を定め、その主曲線に対する主法線方向（曲率方向)、従法線方向（上記 2 者と直交する方向）の単位ベクトルを用いて、“局所正規直交系”を形成する。系に稠密に分布する磁力線群を考慮すると、この局所正規直交系は、空間上に分布することになる。

（2）この空間にばらまかれた、局所正規直交系の接続を行う為に、主法線方向、従法線方向の単位ベクトルを連ねて形成されるベクトル曲線を導入し、それぞれの曲線に沿って平行移動することにより、隣接する磁力線との相対関係を把握するとともに、解析空間を系全体へと拡張する。

（3）（1）（2）により、空間を稠密に満たした各曲線の、曲率と捻れ率の分布が一意決定される。これにより、局所正規直交基底で形成される“正 4 面体”が、各曲線に沿って変化する様子（剛体的な方向変化と回転）が決定され、磁場の 3 次元的な幾何構造が、完全に決定される。

即ち、局所座標系が張る 4 面体を、主曲線、主法線、従法線それぞれの方向に沿って変位させることにより、この動 4 面体が、どのように曲線に沿って曲がり、回転するのかを把握することにより、全空間に拡がるベクトル場の構造を知るという方法論である。更に、この動 4 面体の時間的な発展率（時間的な方向変化率と捻れ率の変化）導出も行った。これにより磁場幾何の 3 次元発展の記述も可能となる。

講演では、これらのフレームワークにより把握されるベクトル場の基本構造について概観し、その物理則による決定論について議論する。